Практическое занятие №8.

Задачи для самостоятельной работы студента

Решение задач по темам: **Полное исследование функции.**

1. Провести полное исследование указанных функций и построить их графики.

a) $y=\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2$; b) $y=\dfrac{3}{x(4-x)}$; c) $y=\dfrac{x}{1-x^2}$.

2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции y на отрезке

a) $y=x+3\sqrt[3]{x}$ на отрезке $[-1;1]$

b) $y=x-4\sqrt{x+2}+8$ на отрезке $[-1;7]$

c) $y=\dfrac{x}{4}+\dfrac{4}{x}$ на отрезке $[1;6]$.

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задачи из Лекции №8 (ФИТ)

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию $y=x^3-9x^2+24x$

Пример 2. Найти наибольшее значение непрерывной функции $y=x^3-3x^2-45x+225$ на отрезке [0;6].

Пример 3. Найти точки экстремума и точки перегиба графика функции $y=3x^4-8x^3+6x^2+12$

Пример 4. Найти асимптоты для функции $f(x)=\dfrac{x^3-6x^2+3}{2x^2+5}$.

Пример 5. Построить график функции $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$.

Пример 6. Провести полное исследование и построить график функции $f(x)=(x+2)\ e^{\frac{1}{x}}$.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Пример:

1. Построить график функции $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

Δ 1°. Функция определена при тех значениях x, для которых, как следует из определения арксинуса, выполнено неравенство $\left|\dfrac{2x}{1+x^2}\right|\leqslant 1$. Оно равносильно неравенству $(1-|x|)^2\geqslant 0$. Последнее верно для любых вещественных x. Итак, $D(f)=\boldsymbol{R}$. Функция $\dfrac{2x}{1+x^2}$ непрерывна в любой точке (как частное двух непрерывных функций). Поэтому функция $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ также непрерывна в любой точке (как суперпозиция непрерывных функций), и, следовательно, график функции не имеет вертикальных асимптот. Для нахождения наклонной асимптоты при $x\to\infty$ вычислим следующие пределы:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to+\infty}\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\arcsin 0=0.$$

Отсюда следует, что прямая $y=0$ является асимптотой при $x\to+\infty$ (ее правильнее назвать горизонтальной, а не наклонной). Аналогично можно установить, что та же прямая $y=0$ является асимптотой при $x\to-\infty$.

2°. Очевидно, что функция непериодическая и является нечетной. Поэтому вместо всей области определения достаточно рассмотреть полупрямую $[0,+\infty)$.

3° Имеем $y=0$ при $x=0$ Других нулей, а также точек разрыва функция не имеет На полупрямой $(0,+\infty)$ функция является положительной

4° Найдем точки возможного экстремума на полупрямой $[0,+\infty)$ Вычислим производную функцию при $x\neq 1$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1+x^2}{|1-x^2|}\,\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{2\,\mathrm{sgn}\,(1-x^2)}{1+x^2}$$

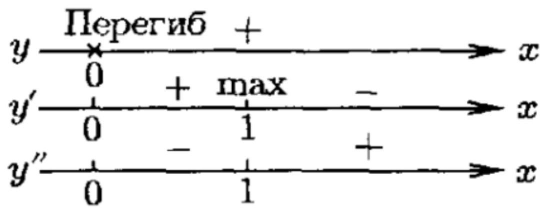
Отсюда видно, что производная не обращается в нуль ни в одной точке Так как $y'(1+0)=-1$, $y'(1-0)=1$, то в точке $x=1$ производная не существует Знак производной при переходе через точку $x=1$ меняется с плюса на минус Поэтому в точке $x=1$ функция имеет локальный максимум, причем $y(1)=\arcsin 1=\pi/2$ Отметим, что в точке $x=1$ функция непрерывна, а ее производная имеет разрыв I рода В таком случае соответствующая точка графика (в данном примере точка $(1,\pi/2)$) называется *угловой точкой* Промежутки монотонности функции определяются знаком производной $y'>0$ при $0\leqslant x<1$, $y'<0$ при $x>1$

5° Так как вторая производная

$$y''=\frac{-4x\,\mathrm{sgn}\,(1-x^2)}{(1+x^2)^2},\qquad x\neq 1,$$

обращается в нуль лишь при $x=0$ и при переходе через точку $x=0$ y'' меняет знак, то в точке $(0,y(0))=(0,0)$ график функции имеет перегиб Направление выпуклости определяется знаком второй производной $y''<0$ при $0\leqslant x<1$, $y''>0$ при $x>1$

Исследование функции закончено Перед тем как строить график, удобно изобразить на схеме результаты исследования, в частности, промежутки знакопостоянства функции, первой проиводной y' и второй производной y''



Теперь, считывая информацию со схемы, строим график функции на промежутке $[0,+\infty)$ На отрезке $[0,1]$ а) функция возрастает от значения $y=0$ при $x=0$ до значения $y=\pi/2$ при $x=1$, б) выпуклость направлена вверх Далее, на полупрямой $[1,+\infty)$ а) функция убывает, оставаясь положительной, б) выпуклость направлена вниз, в) при $x\to+\infty$ график приближается к асимптоте — оси Ox Отметим, что при переходе через точку $x=1$ изменяется направление выпуклости графика, но точка $(1,\pi/2)$ не является точкой перегиба — это угловая точка (рис 6)

Наконец, используя нечетность функции, достраиваем ее график на всей области определения (рис 7) ▲

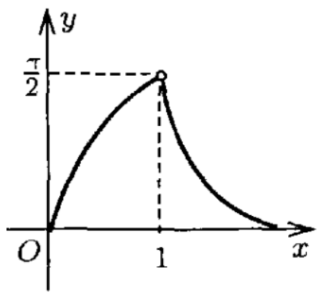


Рис 6

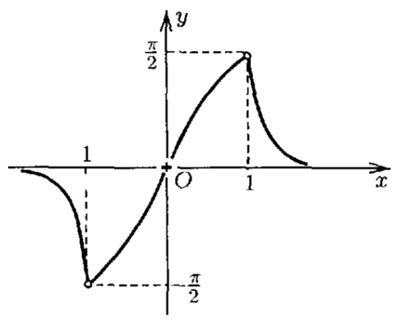


Рис 7

Пример:

Найти интервалы возрастания и убывания функции $f(x) = x^3-6x^2+5$.

◔ Функция определена на всей числовой оси, а ее производная равна $f'(x)=3x^2-12x=3(x-2)(x+2)$. Функция $f(x)$ возрастает тогда и только тогда, когда $f'(x))>0$, т. е. $(x-2)(x+2)>0$, откуда $x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. Аналогично, данная функция убывает в точности когда $f'(x)<0$, т. е. $(x-2)(x+2)<0$, откуда $x\in(-2;2)$.

Таким образом, функция $f(x)$ возрастает на интервалах $(-\infty;-2)$ и $(2;+\infty)$, а убывает на интервале $(-2;2)$. ●

Пример:

Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

◔ Функция определена и дважды дифференцируема на всей действительной оси. Находим вторую производную:

$$f''(x)=\frac{6\left(x^2-\frac{1}{3}\right)}{(x^2+1)^3}.$$

Отсюда получим: функция выпукла вверх тогда и только тогда, когда $f''<0$, т. е. $x^2-\dfrac{1}{3}<0$, или $|x|<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Функция выпукла вниз тогда и только тогда, когда $x^2-\dfrac{1}{3}>0$, т. е. $x\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$.

Таким образом, функция выпукла вверх на $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, выпукла вниз на $\left(-\infty;-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и на $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$. Откуда ясно,

что точки $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ являются точками перегиба данной функции. ●

Пример:

Найти асимптоты графика функции $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

❍ Функция непрерывна всюду, кроме точки $x = 1$, в которой она терпит разрыв второго рода, причем $\lim\limits_{x \to 1-0} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1+0} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$. Отсюда следует, что прямая $x = 1$ — вертикальная асимптота и других вертикальных асимптот нет.

Проверим, есть ли у графика функции наклонные асимптоты. Находим

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x-1} = 1, \text{ откуда}$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-1} = 0.$$

Таким образом, прямая $y = x$ — наклонная асимптота графика функции при $x \to +\infty$. Аналогично получим, что эта прямая является наклонной асимптотой и при $x \to -\infty$.

Поскольку угловой коэффициент k наклонной асимптоты не равен нулю, то график функции не имеет горизонтальных асимптот. ●

Пример:

Провести полное исследование функции $y = \frac{x^3}{4-x^2}$ и построить ее график.

❍ Область определения $D(f)$ функции — вся числовая ось, за исключением точек $x = -2$ и $x = 2$, т. е.

$$D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty).$$

Функция непериодическая; исследуем ее на четность и нечетность:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{4-(-x)^2} = -\frac{x^3}{4-x^2} = -f(x).$$

Следовательно, данная функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат. Поэтому далее исследуем функцию только при $x \geqslant 0$.

Найдем точки пересечения графика с осями координат:

с осью Oy график пересекается при $x = 0$, откуда

$$y = f(0) = 0,$$

т. е. $M(0; 0)$ — точка пересечения с осью Oy;

с осью Ox график пересекается, если $f(x) = 0$, т. е. $\frac{x^3}{4-x^2} = 0$, откуда $x = 0$. Таким образом, $M(0; 0)$ — единственная точка пересечения графика с осями координат.

Находим интервалы знакопостоянства функции:

$$f(x) > 0 \iff \frac{x^3}{4-x^2} > 0 \iff x(4-x^2) > 0,$$

и так как мы рассматриваем только случай $x \geqslant 0$, то получаем $0 < x < 2$.

Аналогично $f(x) < 0$ при $x > 2$.

Далее,

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{x^3}{4-x^2} = +\infty, \quad \lim_{x\to 2+0} \frac{x^3}{4-x^2} = -\infty,$$

т. е. прямая $x = 2$ — вертикальная асимптота. Отсюда, в силу симметрии, следует, что прямая $x = -2$ — также вертикальная асимптота.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{4-x^2} = -1,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{4-x^2} + x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{4-x^2} = 0,$$

т. е. прямая $y = -x$ — наклонная асимптота при $x \to +\infty$ (то же и при $x \to -\infty$). Горизонтальных асимптот график не имеет.

Найдем интервалы монотонности и экстремумы функции, исследуя первую производную:

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{4-x^2}\right)' = \frac{x^2(12-x^2)}{(4-x^2)^2} = \frac{x^2(2\sqrt{3}-x)(2\sqrt{3}+x)}{(4-x^2)^2}.$$

Отсюда видно, что при $x \geqslant 0$ (см. рис. 87) функция имеет максимум в точке $x = 2\sqrt{3}$ (причем $f(2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} \approx -5{,}2$), возрастает на $(0; 2)$ и $(2; 2\sqrt{3})$ и убывает на $(2\sqrt{3}; +\infty)$.

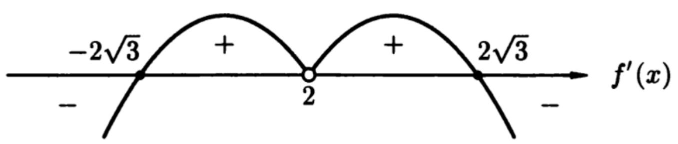


Рис. 87

Чтобы определить интервалы выпуклости и точки перегиба, вычислим вторую производную:

$$f''(x) = \frac{8x(12+x^2)}{(4-x^2)^3}.$$

Отсюда ясно, что при $x \geqslant 0$ функция выпукла вверх (т. е. $f'' < 0$) на $(2; +\infty)$ и выпукла вниз (т. е. $f'' > 0$) на $(0; 2)$, $x = 0$ — точка перегиба.

Учитывая накопленную информацию, строим график функции при $x \geqslant 0$, а затем симметрично отражаем его относительно начала координат (рис. 88). ●

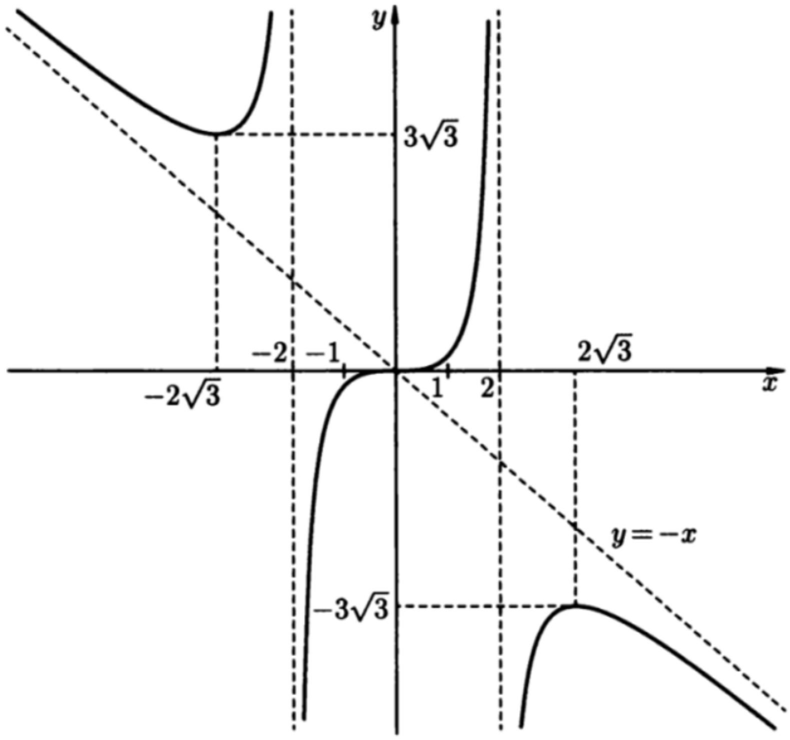


Рис. 88